

## 8.1

- a) Merkitään satunnaisesti valitun pojan pituutta senttimetreinä kirjaimella  $X$ . On määritettävä todennäköisyys  $P(97 \leq X \leq 105)$ .

Kuvion mukaan  $P(97 \leq X \leq 105) = 0,14 + 0,34 = 0,48$ .

- b) On määritettävä todennäköisyys  $P(X \leq 109)$ .

Kuvion mukaan  $P(X \leq 109) = 0,02 + 0,14 + 0,34 + 0,34 = 0,84$ .

- c) On määritettävä todennäköisyys  $P(X > 109)$ .

Kuvion mukaan  $P(X > 109) = 0,14 + 0,02 = 0,16$ .

- d) On määritettävä todennäköisyys  $P(X = 105)$ .

Koska todennäköisyydet ovat pinta-aloja ja janan pinta-ala on nolla, niin

$$P(X = 105) = 0.$$

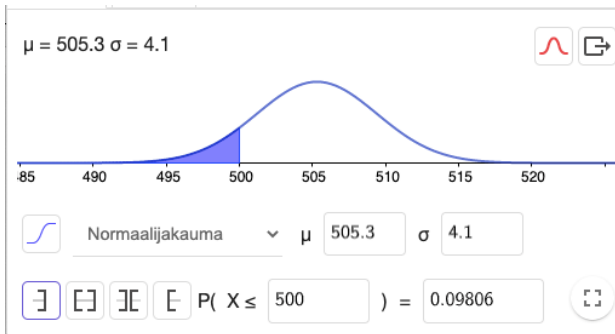
### Vastaus

- a) 0,48
- b) 0,84
- c) 0,16
- d) 0

## 8.2

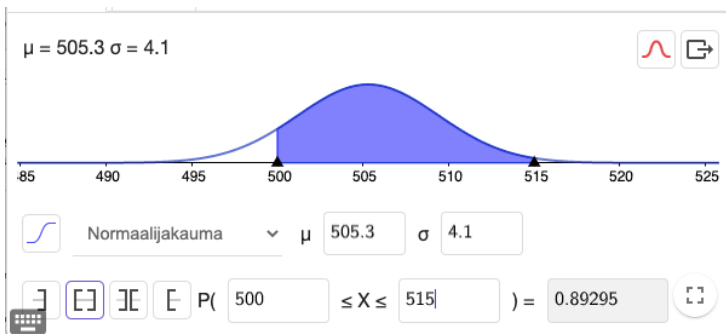
- a) Merkitään satunnaisesti valitun riisipakkauksen painoa grammoina kirjaimella  $X$ . Pakkausten painon keskiarvo on 505,3 g ja keskihajonta 4,1 g. Siis  $\mu = 505,3$  ja  $\sigma = 4,1$ .

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys, että satunnaisesti valittu pakkaus painaa alle 500g.



Saadaan  $P(X < 500) \approx 0,098$ .

- b) Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys, että satunnaisesti valitun pakkauksen paino on välillä 500–515 g.



Saadaan  $P(500 \leq X \leq 515) \approx 0,89$ .

Paino on välillä 500–515 g 89 %:lla pakkauksista.

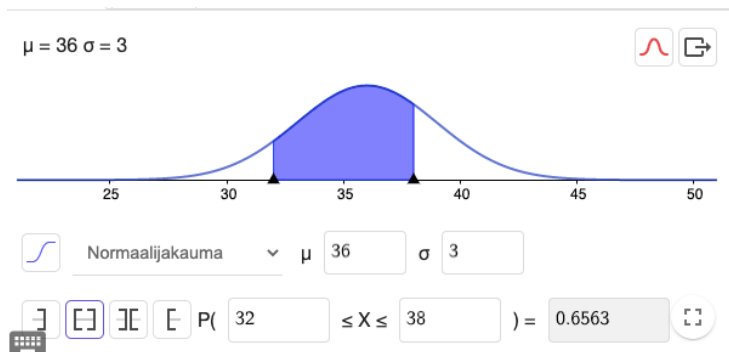
**Vastaus**

**a)** 0,098

**b)** 89 %

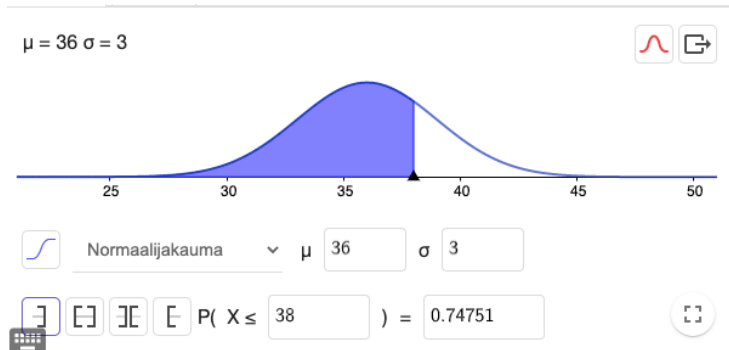
## 8.3

a) Ratkaistaan tehtävä GeoGebran todennäköisyyslaskurilla.



$$P(32 \leq X \leq 38) \approx 0,66$$

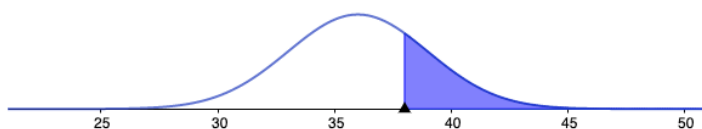
b)



$$P(X \leq 38) \approx 0,75$$

c)

$$\mu = 36 \quad \sigma = 3$$



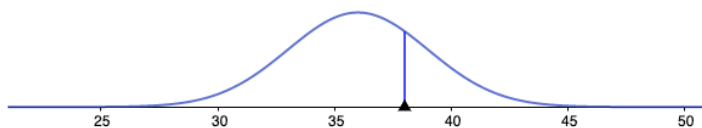
Normaalijakauma  $\mu$  36  $\sigma$  3

$P(38 \leq X) = 0.25249$

$$P(X \geq 38) \approx 0,25$$

d)

$$\mu = 36 \quad \sigma = 3$$



Normaalijakauma  $\mu$  36  $\sigma$  3

$P(38 \leq X \leq 38) = 0$

$$P(X = 38) = 0$$

**Vastaus**

- a) 0,66
- b) 0,75
- c) 0,25
- d) 0

## 8.4

- a) Kuvion 1 perusteella  $P(X \leq 8) = 0,21$ .
- b) Kuvion 3 perusteella  $P(X > 14) = 1 - 0,95 = 0,05$ .
- c) Kuvioiden 2 ja 3 perusteella  $P(10 \leq X \leq 14) = 0,95 - 0,50 = 0,45$ .
- d) Kuvioiden 1 ja 3 perusteella  $P(8 \leq X \leq 14) = 0,95 - 0,21 = 0,74$ .

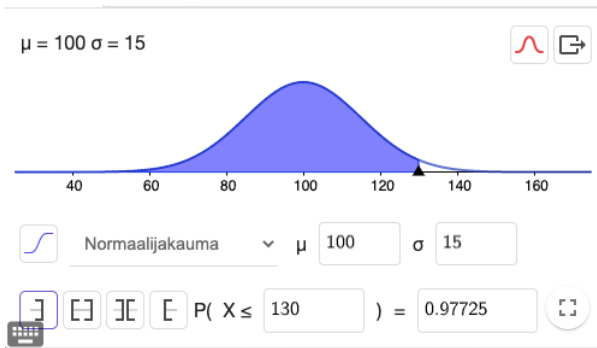
### Vastaus

- a) 0,21  
b) 0,05  
c) 0,45  
d) 0,74

## 8.5

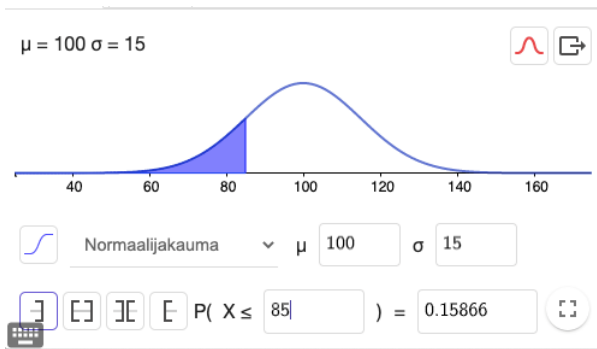
- a) Satunnaisesti valitun ihmisen älykkyysosamäärä  $X$  noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvo  $\mu = 100$  ja keskihajonta  $\sigma = 15$ .

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla  $P(X < 130)$ .



Saadaan  $P(X < 130) \approx 0,98$ .

- b) Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla  $P(X < 85)$ .



Saadaan  $P(X < 85) \approx 0,16$ .

c) a- ja b-kohdan perusteella  $P(85 \leq X \leq 130) \approx 0,98 - 0,16 = 0,82$ .

**Vastaus**

a) 0,98

b) 0,16

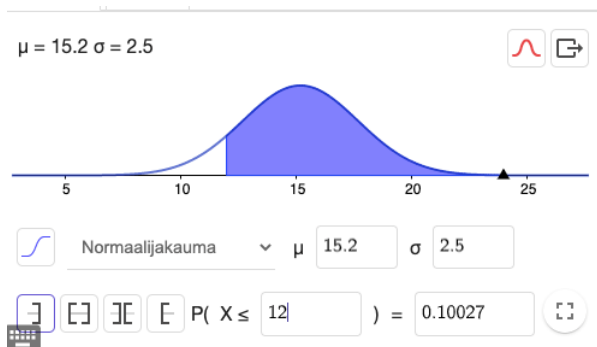
c) 0,82



## 8.6

- a) Olkoon satunnaismuuttuja  $X$  hiustenkuivaajan toiminta-aika. Satunnaismuuttujan  $X$  odotusarvo  $\mu = 15,2$  kuukautta ja keskihajonta  $\sigma = 2,5$  kuukautta.

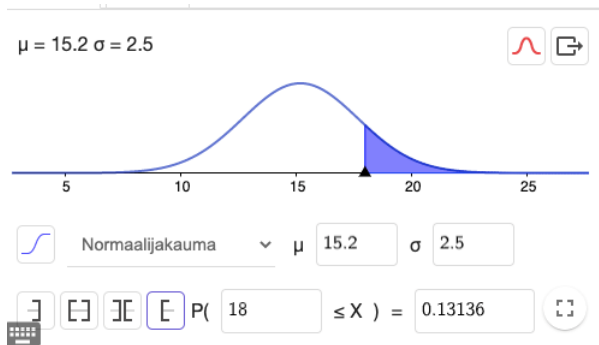
Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys, että hiustenkuivaaja rikkoutuu ensimmäisen vuoden aikana.



Saadaan  $P(X \leq 12) \approx 0,10$ .

Hiustenkuivaajista joutuu takuukorjaukseen noin 10 %.

- b) Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys, että hiustenkuivaaja toimii rikkoutumatta yli 18 kuukautta.



Saadaan  $P(X > 18) \approx 0,13$ .

Noin 13 % hiustenkuivaajista toimii yli 18 kuukautta.

### Vastaus

a) 10 %

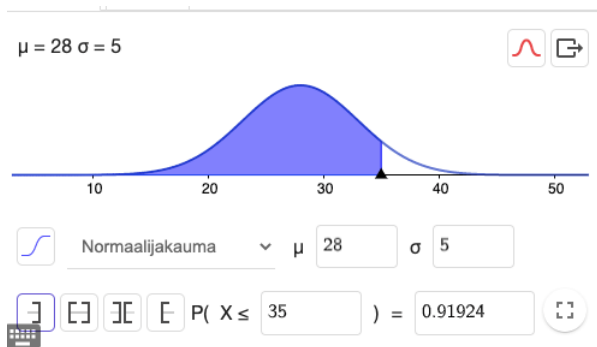
b) 13 %

## 8.7

- a) Koulumatkan kesto  $X$  noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvo  $\mu = 28$  minuuttia ja keskihajonta  $\sigma = 5,0$  minuuttia.

Anna ehtii tunnille, jos koulumatka kestää enintään 35 minuuttia.

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla  $P(X \leq 35)$ .



Saadaan  $P(X \leq 35) \approx 0,91924$ .

Lasketaan todennäköisyys, että Anna ehtii tunnille jokaisena viitenä aamuna.

$$0,91924^5 \approx 0,66$$

- b) Tapahtuma "myöhästyy ainakin kerran" on tapahtuman "ehtii tunnille jokaisena aamuna" vastatapahtuma.

Lasketaan tapahtuma "myöhästyy ainakin kerran" todennäköisyys.

$$1 - 0,66 = 0,34$$

**Vastaus**

- a) 0,66  
b) 0,34

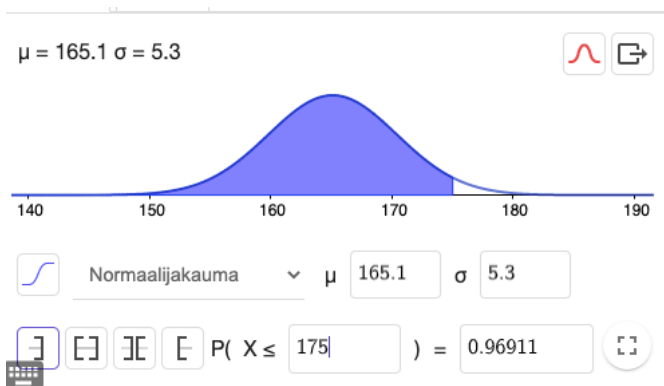
## 8.8

$$\mu = 165,1$$

16-vuotiaiden tyttöjen pituus  $X$  noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvo on  $\mu = 165,1$  cm ja keskihajonta  $\sigma = 5,3$  cm.

Tapahtuman "ainakin yksi yli 175 cm pitkä pelaaja" vastatapahtuman on "kaikki kuusi ovat enintään 175 cm pitkiä".

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla  $P(X \leq 175)$ .



Saadaan  $P(X \leq 175) \approx 0,96911$ .

Lasketaan tapahtuman "kaikki kuusi ovat enintään 175 cm pitkiä" todennäköisyys.

$$0,96911^6 \approx 0,82840$$

Lasketaan tapahtuman "ainakin yksi yli 175 cm pitkä pelaaja" todennäköisyys.

$$1 - 0,82840 \approx 0,17$$

**Vastaus**

0,17

## 8.9

a) Ratkaistaan tehtävä GeoGebran todennäköisyyslaskurilla.

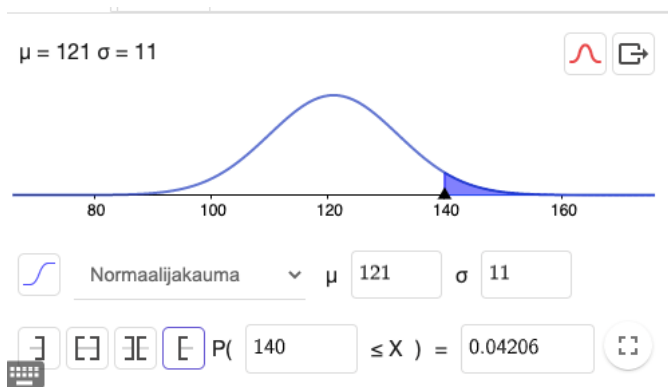
Terveiden testitulos  $X$  noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvo  $\mu = 121$  ja keskihajonta  $\sigma = 11$ .

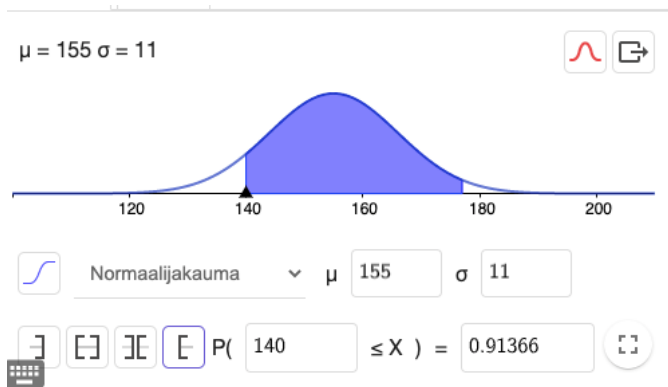
Todennäköisyys, että terve joutuu tutkimukseen on  $P(X > 140) \approx 0,042$ .

Terveistä joutuu tutkimukseen 4,2 %.

Sairaiden testitulos  $Y$  noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvo  $\mu = 155$  ja keskihajonta  $\sigma = 11$ .

Todennäköisyys, että sairas joutuu tutkimukseen on  $P(X > 140) \approx 0,914$ . Sairaista joutuu tutkimukseen 91,4 %.





b) Ryhmässä on  $0,01 \cdot 260\,000 = 2600$  sairasta.

Heistä jatkotutkimukseen joutuu  $0,914 \cdot 2600 \approx 2376$  henkilöä.

Terveitä on  $260\,000 - 2600 = 257\,400$ .

Heistä jatkotutkimukseen joutuu  $0,042 \cdot 257\,400 \approx 10\,811$  henkilöä.

Jatkotutkimukseen joutuu yhteensä  $2376 + 10\,811 = 13\,187$  henkilöä.

Lasketaan todennäköisyys, että jatkotutkimukseen joutuva on terve.

$$\frac{10\,811}{13\,187} \approx 0,82$$

### Vastaus

a) terveistä 4,2 %, sairaista 91,4 %

b) 0,82

## 8.10

- a) Merkitään satunnaisesti valitun ihmisen älykkyyssosamäärää kirjaimella  $X$ .

Kuvion mukaan  $P(85 \leq X \leq 115) = 0,34 + 0,34 = 0,68$ .

Älykkyydeltään normaaleja on 68 % väestöstä.

- b) Älykkyyssosamäärän odotusarvo on 100 ja keskihajonta 15. Kahden keskihajonnan verran odotusarvon yläpuolella on älykkyyssosamäärä  $100 + 2 \cdot 15 = 130$ .

Kuvion mukaan  $P(X \geq 130) = 0,02$ .

Huippuälykkäitä on 2 % väestöstä.

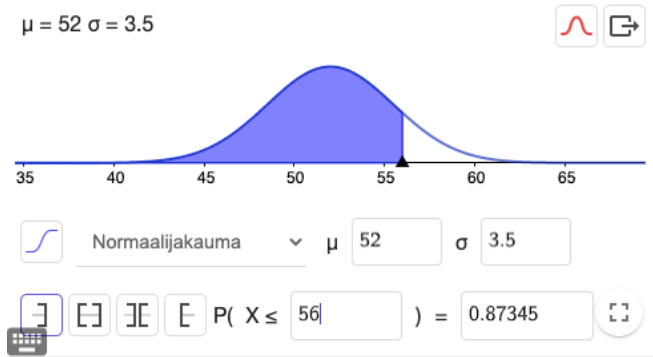
### Vastaus

- a) 68 %  
b) 2 %

## 8.11

- a) Merkitään satunnaisesti valitun poikavauvan syntymäpituutta senttimetreinä kirjaimella  $X$ . Syntymäpituuden keskiarvo on 52 cm ja keskihajonta 3,5 cm. Siis  $\mu = 52$  ja  $\sigma = 3,5$ .

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys, että satunnaisesti valitun poikavauvan syntymäpituus on alle 56 cm.



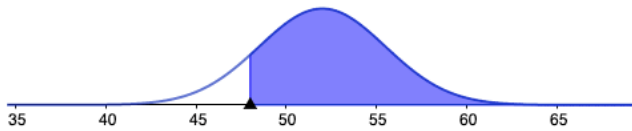
Saadaan  $P(X < 56) \approx 0,87$ .

Poikavauvoista 87 % on syntymäpituudeltaan alle 56 cm.

- b) Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys, että satunnaisesti valitun poikavauvan syntymäpituus on yli 48 cm.



$$\mu = 52 \quad \sigma = 3.5$$



Normaalijakauma  $\mu$  52  $\sigma$  3.5

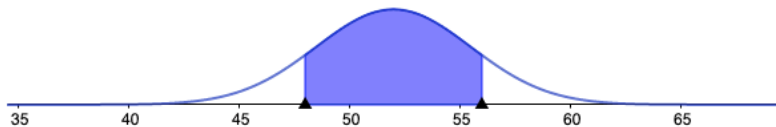
$P(48 \leq X) = 0.87345$

Saadaan  $P(X > 48) \approx 0,87$ .

Poikavauvoista 87 % on syntymäpituudeltaan yli 48 cm.

- c) Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla todennäköisyys, että satunnaisesti valitun poikavauvan syntymäpituus on 48–56 cm.

$$\mu = 52 \quad \sigma = 3.5$$



Normaalijakauma  $\mu$  52  $\sigma$  3.5

$P(48 \leq X \leq 56) = 0.7469$

Saadaan  $P(48 \leq X \leq 56) \approx 0,75$ .

Poikavauvoista 75 % on syntymäpituudeltaan välillä 48–56 cm.

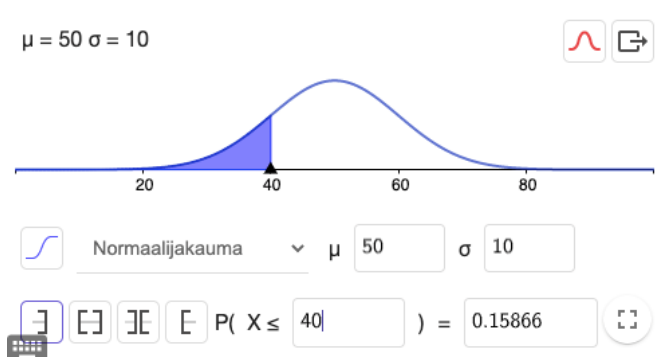
### Vastaus

- a) 87 %  
b) 87 %

**c) 75 %**

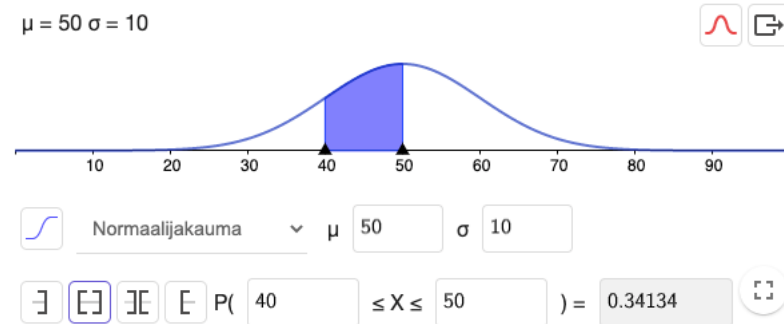
## 8.12

a)  $\mu = 52$  Ratkaistaan tehtävä GeoGebran todennäköisyyslaskurilla.



$$P(X \leq 40) \approx 0,16$$

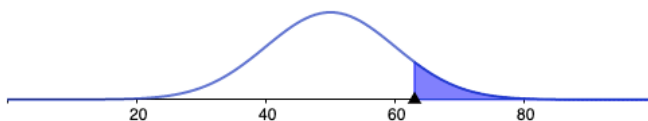
b)



$$P(40 \leq X \leq 50) \approx 0,34$$

c)

$$\mu = 50 \quad \sigma = 10$$



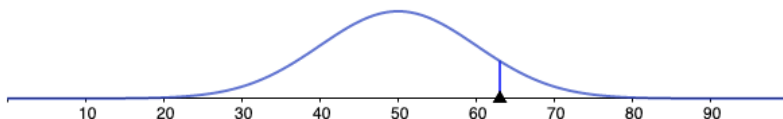
Normaalijakauma  $\mu$  50  $\sigma$  10

$P(63 \leq X) = 0.0968$

$$P(X \geq 63) \approx 0,10$$

d)

$$\mu = 50 \quad \sigma = 10$$



Normaalijakauma  $\mu$  50  $\sigma$  10

$P(63 \leq X \leq 63) = 0$

$$P(X = 63) = 0$$

**Vastaus**

a) 0,16

b) 0,34

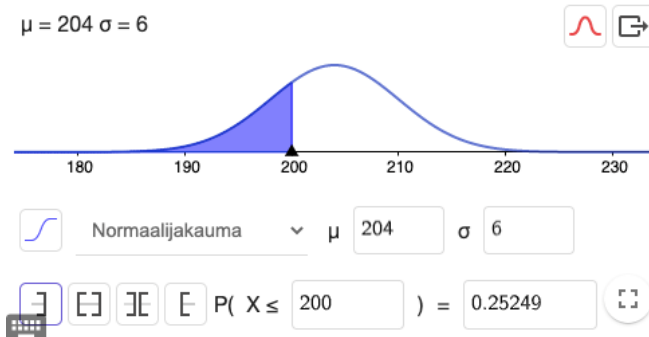
c) 0,10

d) 0,00

## 8.13

Keksipakkauksen massa  $X$  noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvo  $\mu = 204$  grammaa ja keskihajonta  $\sigma = 6$  grammaa.

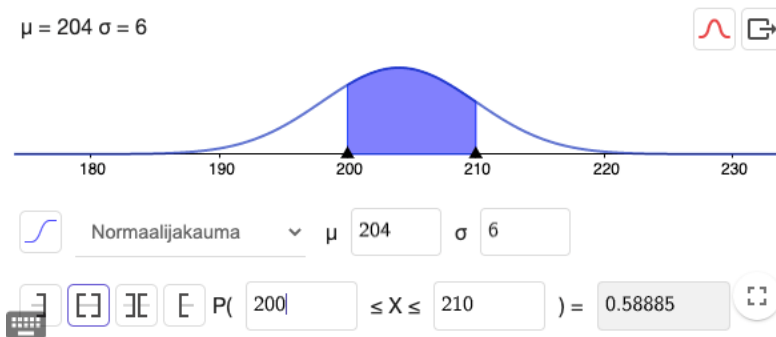
Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla  $P(X < 200)$ .



Saadaan  $P(X < 200) \approx 0,25$ .

Keksipakkauksista 25 %:lla massa oli alle 200 g.

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla  $P(200 \leq X \leq 210)$ .



Saadaan  $P(200 \leq X \leq 210) \approx 0,59$ .

Keksipakkauksista 59 %:lla massa oli välillä 200 g–210 g.

**Vastaus**

25 %:lla pakkauksista massa oli alle 200 g  
ja 59 %:lla välillä 200 g–210 g.

## 8.14

Ratkaistaan tehtävä GeoGebran todennäköisyyslaskurilla.

Kananmunien paino  $X$  noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvo  $\mu = 66,1$  grammaa ja keskihajonta  $\sigma = 7,2$  grammaa.

 Normaalijakauma  $\mu$  66.1  $\sigma$  7.2

     $P( 73 \leq X ) = 0.16895$  

Painoluokassa XL on 17 % kananmunista.

 Normaalijakauma  $\mu$  66.1  $\sigma$  7.2

     $P( 63 \leq X \leq 73 ) = 0.49766$  

Painoluokassa L on 50 % kananmunista.

 Normaalijakauma  $\mu$  66.1  $\sigma$  7.2

     $P( 53 \leq X \leq 63 ) = 0.29897$  

Painoluokassa M on 30 % kananmunista.

 Normaalijakauma  $\mu$  66.1  $\sigma$  7.2

     $P( X \leq 53 ) = 0.03442$  

Painoluokassa S on 3 % kananmunista.

**Vastaus**

XL 17%, L 50 %, M 30 %, S 3 %



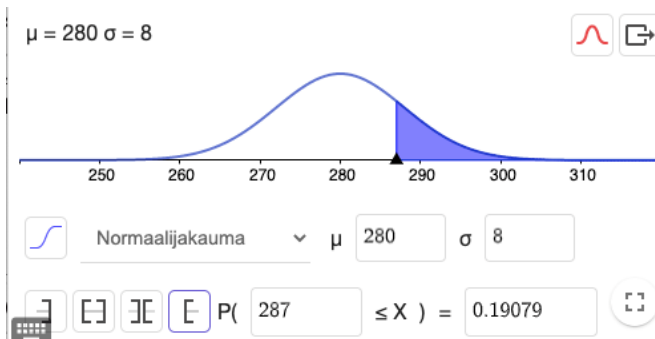
## 8.15

Ratkaistaan tehtävä GeoGebran todennäköisyyslaskurilla.

**Tapa 1.** Mitataan aikaa päivinä.

Raskausaika  $X$  noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvo  $\mu = 40 \cdot 7 = 280$  päivää ja keskihajonta  $\sigma = 8$  päivää.

On määritettävä todennäköisyys  $P(X \geq 287)$

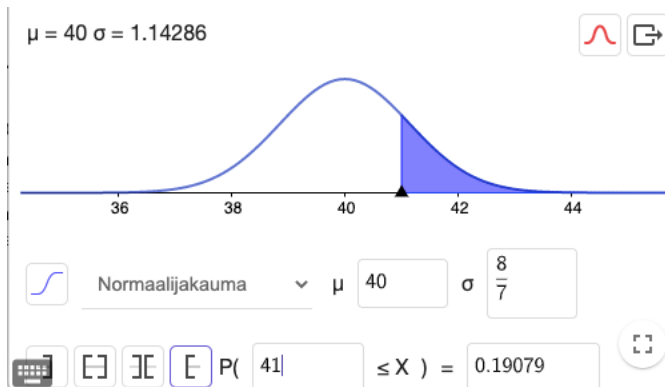


Saadaan  $P(X \geq 287) \approx 0,19$ .

**Tapa 2.** Mitataan aikaa viikkoina.

Raskausaika  $X$  noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvo  $\mu = 40$  viikkoa ja keskihajonta  $\sigma = \frac{8}{7}$  viikkoa.

On määritettävä todennäköisyys  $P(X \geq 41)$ .



Saadaan  $P(X \geq 41) \approx 0,19$ .

**Vastaus**

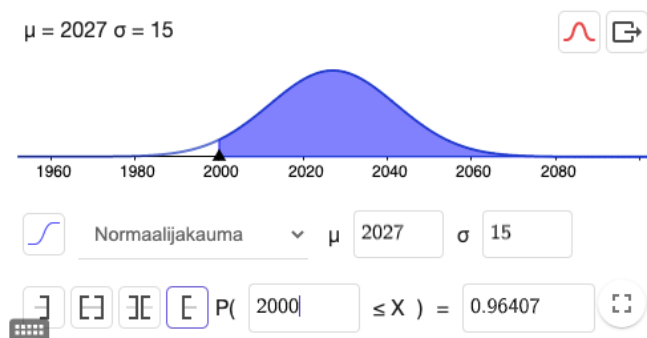
19 %

## 8.16

Ratkaistaan tehtävä GeoGebran todennäköisyyslaskurilla.

Silmukan kantokyky  $X$  noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvo  $\mu = 2027$  kg ja keskihajonta  $\sigma = 15$  kg.

Määritetään todennäköisyys, että satunnaisesti valittu silmukka kestää 2000 kg:n taakan.



Saadaan  $P(X \geq 2000) \approx 0,96407$ .

Lasketaan todennäköisyys, että kaikki 10 silmukkaa kestävät 2000 kg:n taakan.

$$0,96407^{10} \approx 0,69$$

**Vastaus**

0,69

## 8.17

- a)  $X_1$ : "satunnaisesti valitun 12-vuotiaan tytön pituus"

$$\mu_1 = 153,1 \text{ (cm)}$$

$$\sigma_1 = 6,8 \text{ (cm)}$$

- $X_2$ : "satunnaisesti valitun 12-vuotiaan pojan pituus"

$$\mu_2 = 151,6 \text{ (cm)}$$

$$\sigma_2 = 6,4 \text{ (cm)}$$

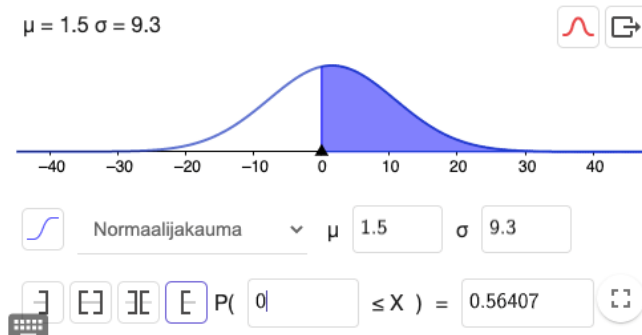
$$X = X_1 - X_2$$

$$\mu = \mu_1 - \mu_2 = 153,1 - 151,6 = 1,5 \text{ (cm)}$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} = \sqrt{6,8^2 + 6,4^2} \approx 9,3 \text{ (cm)}$$

- b) Tyttö on pidempi kuin poika, kun  $X > 0$ .

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla  $P(X > 0)$ .

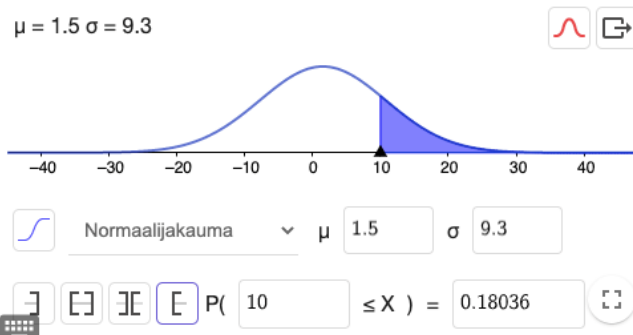


Saadaan  $P(X > 0) \approx 0,56$ .

- c) Tyttö on yli 10 cm pidempi kuin poika, kun  $X > 10$ .

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla  $P(X > 10)$ .

$$\mu = 1.5 \quad \sigma = 9.3$$

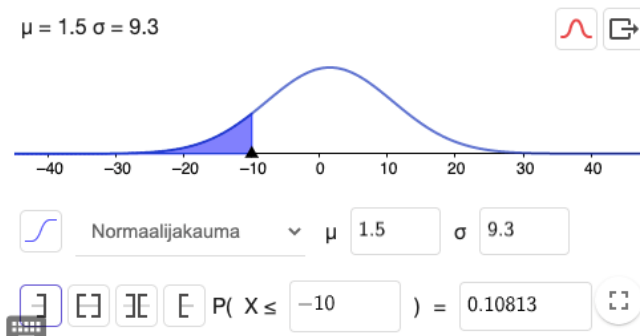


Saadaan  $P(X > 10) \approx 0,18$ .

**d)** Poika on yli 10 cm pidempi kuin tyttö, kun  $X < -10$ .

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla  $P(X < -10)$ .

$$\mu = 1.5 \quad \sigma = 9.3$$



Saadaan  $P(X < -10) \approx 0,11$ .

**Vastaus**

**a)**  $\mu = 1,5 \text{ cm}$ ,  $\sigma \approx 9,3 \text{ cm}$

**b)** 0,56

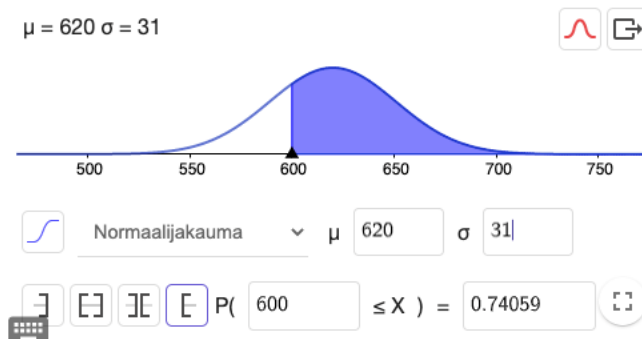
**c)** 0,18

**d)** 0,11

## 8.18

- a) Akun toiminta-aika  $X$  noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvo  $\mu = 620$  tuntia ja keskihajonta  $\sigma = 31$  tuntia.

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla  $P(X \geq 600)$ .



Saadaan  $P(X \geq 600) \approx 0,74059$ .

Lasketaan todennäköisyys, että kaikki neljä akkua toimivat yli 600 tuntia.

$$0,74059^4 \approx 0,30$$

- b) Tapahtuma "ainakin yksi akku toimii yli 600 tuntia" on tapahtuman "kaikki 4 akkua toimivat alle 600 tuntia" vastatapahtuma.

a-kohdan perusteella  $P(X < 600) \approx 1 - 0,74059 = 0,25941$ .

Tapahtuman "kaikki 4 akkua toimivat alle 600 tuntia" todennäköisyys on  $0,25941^4$ .

Lasketaan tapahtuma "ainakin yksi akku toimii" todennäköisyys.

$$1 - 0,25941^4 \approx 0,995$$

**Vastaus**

**a)** 0,30

**b)** 0,995



## 8.19

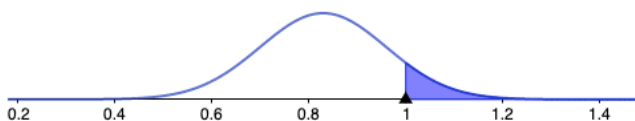
Olkoon satunnaismuuttuja  $X$  ihmisen lepopulssi (lyöntiä sekunnissa) ja satunnaismuuttuja  $Y$  sydämen lyönnin kesto (sekuntia).

Lyönnin kesto  $Y$  noudattaa normaalijakaumaa, jonka odotusarvo  $\mu = 0,83$  sekuntia ja keskihajonta  $\sigma = 0,13$  sekuntia.

Jos lepopulssi on alle 60, niin lyönnin kesto on yli 1.

Määritetään GeoGebran todennäköisyyslaskurilla  $P(Y > 1)$ .

$\mu = 0.83$   $\sigma = 0.13$



Normaalijakauma  $\mu$  0.83  $\sigma$  0.13

$P(1 \leq X) = 0.09549$

Saadaan  $P(Y > 1) \approx 0,095$ .

Ryhmäläisistä 9,5 %:lla lepopulssi on alle 60.

### Vastaus

9,5 %:lla ryhmään kuuluvista